Joonas Karaila

TARJOUSKIRJAN STOKASTINEN MALLINTAMINEN

Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Kandidaatintyö
Joulukuu 2019

TIIVISTELMÄ

Joonas Karaila: Tarjouskirjan stokastinen mallintaminen
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Tuotantotalous
Joulukuu 2019

Tässä kandidaatintyössä käsitellään tarjouskirjan stokastista mallintamista, mikä yhdistää useita eri matematiikan osa-alueita. Työssä käsitellään yhtä keskeistä mallia syvällisesti, mikä johtaa ymmärrykseen tarjouskirjan mallintamisesta ja mallin kritisointiin empiiristen tutkimusten ja vaihtoehtoisten mallien pohjalta. Työ on toteutettu kirjallisuuskatsauksena eli malleja on vertailtu kvalitatiivisesti ja selkeitä kehityskohteita on esitetty muiden tutkimusten pohjalta.

Tarjouskirjan mallintamisessa tärkeitä mallinnettavia asioita ovat osto- ja myyntihinta, tarjouksien määrät eri hinnoilla ja todennäköisyydet, joilla muutoksia tapahtuu tarjouskirjassa. Työssä tarjouskirja on ensin esitetty matemaattisin merkinnöin, minkä jälkeen näille tärkeille ominaisuuksille on esitetty matemaattiset kaavat tulevaisuuteen. Samalla malliin on esitetty kehityskohteita, kuten esimerkiksi parametrien estimoinnissa vaihtoehtoisia tapoja löytää parhaat parametrit.

Työssä esitetään matemaattiset laskukaavat todennäköisyyksille, joilla keskihinta nousee tai laskee, rajahintatarjous toteutuu ennen hinnan muuttumista ja markkinantakaaja tuottaa hintaeron. Näiden todennäköisyyksien esittäminen mahdollistaa eri kaupankäyntistrategioiden kehittämisen ja työssä esitellään näistä kaksi yksinkertaista vaihtoehtoa. Ensin työssä esitetään miten osake kannattaa ostaa ja myydä myöhemmin, jos hinnan nousemiselle on korkea todennäköisyys, ja tämän jälkeen hintaeron tuottamiselle esitetään strategia.

Mallin vertaaminen vaihtoehtoisiin malleihin on toteutettu etsimällä mahdollisimman monipuolisia tapoja mallintaa tarjouskirjaa. Tässä ideana on ollut löytää eri kehityskohteita esitettyyn malliin, jotta mahdollinen suurin syy epätarkalle tulokselle voitaisiin löytää. Vaihtoehtoisista malleista löydettiin eroavaisuuksia tarjouksien yksittäisestä tarkastelusta, tapahtumien välisistä korrelaatioista, differentiaaliyhtälöiden tärkeydestä, oletetusta jakaumasta, ratkaisun analyyttisyydestä, volatiliteetin vaikutuksesta, taloustieteellisestä selityksestä ja omien toimintojen vaikutuksesta tarjouskirjaan. Näiden havaintojen perusteella malliin mietittiin mahdollisia kehityskohteita, jotka olisivat jatkotutkimuksen kohteina.

Avainsanat: Tarjouskirja, Stokastinen, Mallintaminen

ABSTRACT

Joonas Karaila: Stochastic Order Book Modelling
Bachelor’s thesis
Tampere University
Industrial Engineering and Management
December 2019

This bachelor’s thesis studies stochastic order book modelling, which includes many different subjects from mathematics. The thesis studies a single stochastic order book model more deeply, which helps with understanding order book modelling and in criticizing the model. The criticizing is done by comparing the model to other models and empirical studies. The bachelor’s thesis is a literature review, and thus it is qualitative in nature and the ideas for further improvements are based on other studies.

The most important values in order book modelling are ask and bid prices, number of orders on each price, and probabilities of different changes in the order book. In the thesis, the order book is first introduced with mathematical notation, which is followed by the equations of different probabilities of changes. Furthermore, while the order book is introduced, different improvement ideas are introduced. For example, when estimating parameters for the model, one could use different methods to get better results.

The three equations of probabilities are introduced for increase in mid-price, executing order before mid-price moves and making the spread. The introduction of the equations makes it possible to use them in simple trading strategies of which two are introduced. In the first one, a market participant buys a stock and sells it later if there is a high probability of increase in the mid-price. In the second one, a market participant should enter two limit book orders if there is a high probability of making the spread.

Different models are briefly introduced to compare them to the main model. The different models are as different as possible to get maximum utility from them for the main model. The different models differ in the use of unit size in order sizes, the correlations between different changes, the importance of differential equations, the assumption of the probability distribution, the analytical solution, the effect of volatility, the economic explanation and how a market participant’s actions affect the order book. These observations were used to make propositions for further improvements in the model.

Keywords: Stochastic, Order book, Modelling

The originality of this thesis has been checked using the Turnitin OriginalityCheck service.

ALKUSANAT

Ennen kandidaatintyökurssille ilmoittautumista en ollut varma mistä aiheesta haluan kirjoittaa työn, mutta tiesin haluavani tehdä työn matemaattisesta rahoituksesta ja halusin haastaa itseäni. Minulla oli kolme eri aihealuetta, joista mietin, että voisin tehdä työn, mutta aiheista ei ollut tutkimusta, mikä olisi rajoittanut kirjallisuuskatsauksen tekemistä. Onneksi Juho Kanniainen ehdotti tarjouskirjan mallintamista, koska aihe osoittautui erittäin mielenkiintoiseksi ja haastavaksi. Työn kirjoittaminen opetti minulle paljon ja tulevaisuudessa implementoin mallin.

Haluaisin kiittää Tuomas Korhosta työn ohjauksesta, Juho Kanniaista aiheesta ja kommenteista työn aikana ja kurssikavereita vertaispalautteesta ja tuesta. Haluaisin myös kiittää perhettäni ja kavereitani tuesta ja ymmärryksestä kiireisen kirjoitusprosessin aikana.

Tampereella, 8.12.2019

Joonas Karaila

SISÄLLYSLUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

ADAM	Adaptive moment estimation, optimointialgoritmi
inf	Infimum eli joukon suurin alaraja
M	Noteerauksien määrä
n	Hinta-askeleiden määrä
N_m	Saapuneiden markkinatarjousten määrä, jotka eivät vaikuttaneet parhaisiin tarjouksiin
p	Hinta
$p_A(t)$	Ostohinta hetkellä t
$p_B(t)$	Myyntihinta hetkellä t
$p_M(t)$	Keskihinta hetkellä t
$p_S(t)$	Hintaero hetkellä t
$Q_i^A(t)$	Myyntitarjousten määrä etäisyydellä i myyntihinnasta hetkellä t
$Q_i^B(t)$	Ostotarjousten määrä etäisyydellä i ostohinnasta hetkellä t
s	Kompleksinen frekvenssi taajuusparametri
S_c	Peruttujen tarjousten määrä historiadatan perusteella
S_l	Rajahintatarjousten määrä historiadatan perusteella
S_m	Markkinatarjousten määrä historiadatan perusteella
sup	Supremum eli joukon pienin yläraja
t	Aika
T_*	Aikaväli
$x^{p\pm1}$	Muutos tarjousten määrässä hinnalla p
$X_p(t)$	Tarjousten määrä hetkellä t hinnalla p, positiivinen arvo viittaa myyntitarjouksiin ja negatiivinen ostotarjouksiin
$X(t)$	Tarjouskirja hetkellä t
ϵ_a	Ensimmäinen hetki, kun myyntihinnalla ei ole enää tarjouksia
ϵ_b	Ensimmäinen hetki, kun ostohinnalla ei ole enää tarjouksia
$\theta(i)$	Suhteellinen tarjousten perumisnopeus hinta-askeleella i
$\lambda(i)$	Osto- ja myyntitarjouksien saapumisnopeus i hinta-askeleen päähän parhaasta vastaavasta hinnasta
μ	Markkinatarjousten saapumisnopeus
σ_b	Ensimmäinen hetki, kun prosessi saa arvon 0 ja se alkaa tilalta b
τ	Aika hetken 0 jälkeen
Φ	Ketjumurtoluku
$\mathfrak{B}\{f\}(s)$	Funktion f kaksisuuntainen Laplace-muunnos
$\mathcal{L}\{f\}(s)$	Funktion f yksisuuntainen Laplace-muunnos

.

1. JOHDANTO

Pörssissä eri tuotteita myydään ja ostetaan eri hinnoilla, jotka muodostavat tarjouskirjan, kun markkinoita ei luoda keinotekoisesti pankin tai jonkin muun toimijan puolesta. Tarjouskirja muuttuu koko ajan, kun eri osto- ja myyntihinnat kohtaavat ja kaupantekijät lisäävät ja poistavat tarjouksiaan jatkuvasti. Jos ostotarjousten hinnat ja volyymi kasvavat jatkuvasti, todennäköisesti myyntihinnatkin alkavat kasvamaan. Sama toimii myös toisin päin, eli jos ostotarjousten hinnat ja volyymi alkavat laskemaan, todennäköisesti myyntitarjouksetkin alkavat laskemaan. (Markowich et al., 2009) Prosessissa erityisen mielenkiinnon kohteina ovat osto- ja myyntitarjousten välinen hinta, tarjousten volyymi ja tuotteiden osto- ja myyntihinnat.

Tarjouskirjan matemaattinen mallinnus mahdollistaa näiden mielenkiintoisien ominaisuuksien ennustamisen esimerkiksi antamalla todennäköisyydet, joilla ominaisuudet muuttuvat. Käyttämällä näitä todennäköisyyksiä on mahdollista luoda tilastollinen arbitraasi, joka tarkoittaa tilastollisesti riskitöntä voittoa. Tämä on rahoitusteorian kannalta mielenkiintoista, koska arbitraaseja ei pitäisi olla teorian mukaan markkinoilla (Varian, 1987). Esimerkiksi Cont et al. (2010) ja Cont ja Mueller (2019) ovat mallintaneet tarjouskirjaa ja saaneet tuotettua tilastollisen arbitraasin. Täten Varianin (1987) mukainen teoria, että markkinoilla ei olisi arbitraaseja, on puutteellinen, ja markkinat eivät olisi täydellisen tehokkaat.

1.1 Tutkielman tavoitteet

Tämän kandidaatintyön tavoite on selvittää, miten tarjouskirjaa on mahdollista mallintaa matemaattisesti luomalla esimerkkimalli kirjallisuuden pohjalta. Samalla mallista selviää, miten malli toimii, mitä malli ei ota huomioon, toimiiko malli mahdollisesti epänormaaleissa oloissa ja kuinka usein mallin parametrit pitää uusia. Täten lopussa mallia on mahdollista arvioida kriittisesti ja mahdollisesti esittää parannuksia siihen. Löytämällä mallin eri osat, joita voidaan kehittää irrallaan toisistaan, mahdollistaa paremman mallin tarkastelun.

Matemaattisen mallinnuksen ymmärtäminen on kriittistä, koska matemaattiset mallit tuottavat saman tuloksen samoilla lähtötiedoilla ja niiden osia voidaan tarkastella erikseen. Koska mallit tuottavat aina saman tiedon samoilla lähtötiedoilla, mallien kehittäminen on helpompaa, koska malli ei muutu satunnaisesti. Pilkkomalla malli osiin ja parantamalla jokaista osaa irrallaan päästään parempiin tuloksiin kuin pyrkimällä parantamaan koko prosessia samanaikaisesti. Parempi tulos tässä tarkoittaa pienempää virhettä mallin ja empiiristen havaintojen välillä. Matemaattisia malleja käytetään nykyaikana erittäin paljon (Quarteroni, 2009) ja uusia malleja luodaan esimerkiksi koneoppimisen keinoin jatkuvasti lisää, mikä lisää mielenkiintoa tutustua aiheeseen.

Tässä kandidaatintyössä verrataan Contin et al. (2010) stokastisen tarjouskirjamallin toimintaa muihin malleihin ja pohditaan kehityskohteita malliin. Heidän mallinsa ei oleta markkinoilla toimijoista mitään, eli malli on puhtaasti matemaattinen. Mallia tarkastellaan kandidaatintyön rajoissa, eli pisimmät ja tarkimmat matemaattiset todistukset jätetään luettavaksi lähteiden kautta.

1.2 Tutkimusmenetelmä

Tämä kandidaatintyö on kirjallisuuskatsaus, mikä tarkoittaa ilmiön tarkastelemista olemassa olevan kirjallisuuden avulla. Tiedon etsimistä voidaan kuvailla puumallina, jota iteroidaan jatkuvasti eri tasoilla, kun uusia soveltuvia hakusanoja tulee vastaan. Puun yläosassa on hyvin laajoja kokonaisuuksia sisältävät haut ja alhaalla pieniä kokonaisuuksia sisältävät kohteet. Ylimpänä puussa on tieteellisten lehtien etsimiseen soveltuvat järjestelmät kuten Julkaisufoorumi. Tätä kautta on mahdollista löytää alaan soveltuvia lehtiä esimerkiksi hakusanoilla ”finance” tai ”economics”. Näistä lehdistä voi valita yhden ja mahdollisesti löytää lehden mistä lähteä etsimään tarkemmin tietoa, esimerkiksi Journal of Finance. Täten puussa siirrytään alemmas yhden lehden sisältöön ja sieltä voi alkaa etsiä artikkeleita. Esimerkiksi etsimällä ”order book”-hakusanoilla Journal of Finance-lehden nettisivuilla on mahdollista löytää useita artikkeleita. Näistä artikkeleista voi olla suoraan hyötyä, mutta niistä voi olla myös epäsuoraa hyötyä. Artikkeleista voi löytää uusia hakusanoja, artikkelit ovat voineet viitata hyviin lähteisiin tai artikkeliin voi olla viitattu. Täten on mahdollista löytää suoraan uusia hyviä artikkeleita tai iteroimalla paremmilla hakusanoilla. Myös oikean ammattisanaston käyttäminen hakusanoissa on tärkeää.

Tämä tapa etsiä tietoa on vielä rajoittunut, mutta siihen on hyvä lisätä Tampereen yliopiston Andor, Google Scholar ja Google. Nämä sopivat puussa moneen eri kohtaan, mutta esimerkiksi Google Scholar on hyvä, koska sen avulla voi saada jotain täysin uutta tietoa. Tosin Google voi olla huono, jos haut muistuttavat toisiaan tai hakusanat ovat liian arkisia, koska tällöin hakutulokset ovat usein samoja eivätkä lähteet ole luotettavia. Myös se kuinka usein hakutulokset tuottavat haluttuja tuloksia vähenee. Esimerkki hakulauseesta, mikä toimii suoraan Google Scholarissa, on ”Stochastic order book model*”. Tämä hakulause tuottaa useita tuloksia, joita on mahdollista hyödyntää suoraan. Sama hakulause tuottaa myös hyviä tuloksia yliopiston tietokannoissa.

Kandityön aihe sisältää kokonaisuuksia, joita vasta tutkitaan, kuten (Cont & Mueller, 2019) ja hyvin vanhoja ideoita, kuten matemaattinen mallinnus. Täten osa käytetyistä artikkeleista voi olla hyvin uusia ja osa hyvin vanhoja, mutta molemmissa tapauksissa tiedon luotettavuuden arviointi korostuu. Täten julkaisufoorumi, tekijä, relevanttius ja viittausten määrä artikkeliin nousevat tekijöiksi, jotka pitää huomioida. Näiden huomiointi tarkoittaa, artikkeli, jota on viitattu paljon, ja arvostetut julkaisufoorumi ja tekijä alalla tukevat tiedon luetettavuutta. On epätodennäköistä, että vaikean julkaisuprosessin läpikäynyt ja useaan kertaan hyväksi todetun artikkelin tieto olisi jotenkin virheellistä. Tosin nämäkään kriteerit eivät riitä, koska välillä erittäin hyvää tietoa voi olla vähän viitatussa artikkelissa. Täten lukijalla on korkea vastuu arvioida kriittisesti mikä on luotettavaa ja ajantasaista tietoa.

1.3 Tutkielman rakenne

Kandidaatintyön toisessa luvussa luodaan tarjouskirjan perusoletukset ja -elementit, eli tarjouskirja esitetään matemaattisesti. Tämän jälkeen toisessa luvussa esitetään osto- ja myyntitarjousten lisääminen ja poistaminen sekä näiden tarjousten hylkääminen tarjouskirjan matemaattisessa mallissa. Näitä toimenpiteitä voidaan kuvata jatkuvassa ajassa parametreilla, jotka pitää estimoida. Kun parametrien estimointi on todistettu, niin luodusta mallista voidaan johtaa haluttuja ominaisuuksia.

Kolmannessa luvussa luodusta mallista johdetaan todennäköisyyksiä, joilla hinta muuttuu, kauppa onnistuu ennen hintamuutosta ja toimija tekee hintaeron suuruisen tuoton. Johtamisen aikana väitteet todistetaan käyttämällä kirjallisuutta hyödyksi, mutta mallin valintoja tarkastellaan kriittisesti kirjallisuuden valossa.

Neljännessä luvussa mallin toimintaa tarkastellaan käytännössä. Mallia tai sen muunnelmia on tutkittu useassa eri tutkimuksessa, mikä mahdollistaa mallin tarkkuuden tutkimisen. Tässä luvussa tarkastellaan myös vaihtoehtoisten mallien toimintaa ja sitä, mikä on tällä hetkellä paras tapa mallintaa tarjouskirjaa.

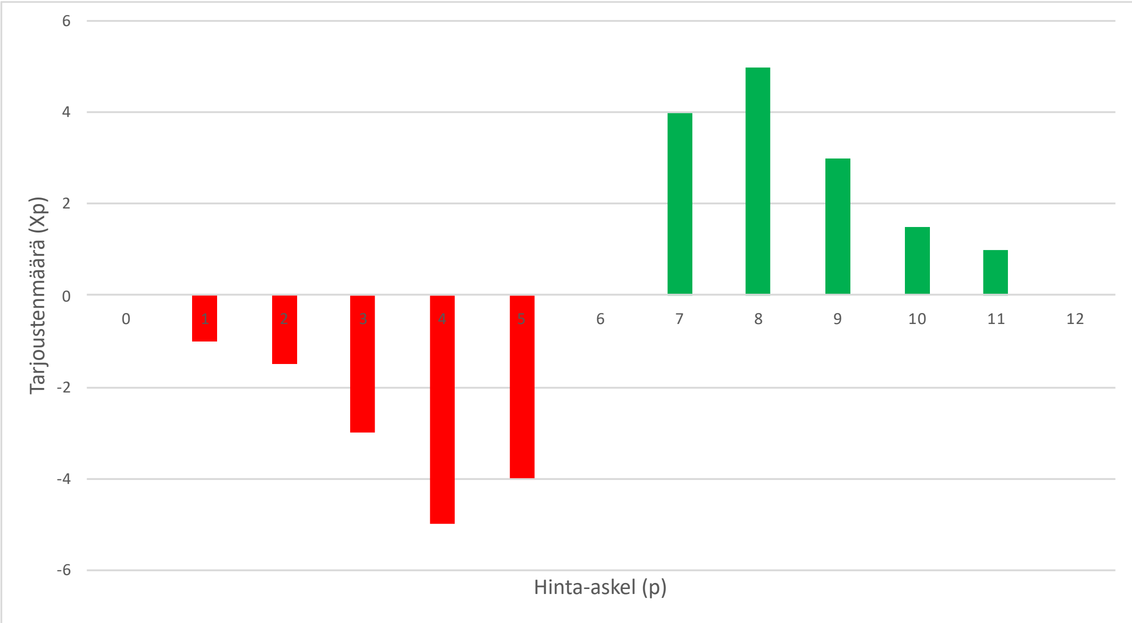
Viimeisessä luvussa työn tulokset vedetään yhteen, pohditaan, onko tutkimuskysymykseen vastattu, ja mietitään mahdollisia jatkokysymyksiä. Lisäksi mallin parametrien aikajänne, eli se kuinka pitkään parametrit ovat oikeat, on tarkastelun kohteena. Toisaalta myös mallin toiminta epänormaaleissa oloissa ja se mitkä ovat epänormaalit olot ovat tärkeitä piirteitä. Näiden perusteella mallista saadaan kandidaatintyön rajoissa mahdollisimman kokonainen näkemys.

2. MALLIN OLETUKSET JA PERUSELEMENTIT

Tarjouskirjaa mallinnetaan samalla tavalla kuin jonoja matematiikassa (Huang et al., 2015). Tarjouskirja voidaan nähdä kahden jonon kohtaamisena: ostotarjoukset ovat yksi jono ja myyntitarjoukset toinen. Nämä jonot odottavat markkinatarjouksia, jotka ostavat tai myyvät tuotteita parhaalla hinnalla. Tämä tarkoittaa, että markkinatarjous ostaa tuotteita tietty määrä poistaa saman määrän alhaisimpia myyntitarjouksia ja markkinatarjous myydä tuotteita poistaa korkeimman hinnan ostotarjouksia. Ostohinta on paras hinta, jolla on mahdollista ostaa osakkeita, ja myyntihinta on paras hinta, jolla osakkeita voi myydä. On myös mahdollista, että myyntitarjous asetetaan ostotarjousten alapuolelle, mikä johtaa parhaalla hinnalla myymiseen tietyllä määrällä, mutta tämä voidaan erotella markkinatarjoukseksi ja mahdollisesti uusiksi myyntitarjouksiksi. Samalla tavalla yli myyntitarjousten asetettu ostotarjous voidaan erotella markkinatarjoukseksi ja ostotarjouksiksi. Kolmas tapa muuttaa jonoja on tarjousten peruminen.

Näille toimenpiteille voidaan luoda matemaattinen malli, joka kuvaa näitä tapahtumia tarkasti. Käyttämällä samoja merkintöjä kuin Cont et al. (2010) tarjouskirja esitetään $\{1, \dots, n\}$ jonona, jossa $p,\ 1 \leq p\ \leq n$ on hinta-askelien määrä. Tämä tarkoittaa, että esimerkiksi $n-4$ ja $n-3$ välissä on 1 hinta-askel. Hinta-askel on pienin mahdollinen hintaero osakkeen hinnassa, eli se riippuu tarkasteltavasta kohteesta. Esimerkiksi vuonna 1996 Toronton pörssissä tämä oli 5 senttiä minimissä ja vuonna 1997 AMEX:n minimi oli 1/16 dollaria. (La Spada et al., 2010). Vuonna 2018 New Yorkin pörssissä käytetty hinta-askel oli 1/100 dollaria, minkä on todettu tuottavan tehokkaammat markkinat kuin suuremmilla hinta-askeleilla (Hu et al., 2018). Jonon maksimi n pitää valita riittävän suureksi, jotta tarjouksien todennäköisyydet olla tätä hintaa suurempia ovat äärimmäisen pienet, jotta malli voi sisältää kaikki tarjoukset rajatulla aikavälillä.

Tarjouskirjaan ajanhetkellä t luodaan tarjousten määrien epätasaisuus esittämällä tarjousten määrä $X_p(t)$ jono muodossa $X(t) = \big(X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)\big), t \geq 0.$ Tällöin $\mathrm{X_p(t)}, 1 \leq \mathrm{p} \leq \mathrm{n}$ on hinta-askeleella (price tick) p olevien tarjousten määrä ajanhetkellä t. Jos $X_p(t) < 0$, niin hinnalla p on $-X(t)$ ostotarjousta, ja jos $X_p > 0$, niin hinnalla p on $X_p(t)$ myyntitarjousta. Ostotarjoukset eivät voi olla myyntitarjouksia suurempia, koska muuten markkinoiden tarjoaja tai joku muu taho voisi tehdä tarjousten välisen summan suoraan yhdistämällä tarjoukset. Kuvassa 1 on esitetty tarjouskirjan visualisointi tietyltä ajanhetkeltä.



***Kuva 1**. Tarjouskirjan visualisointi tietyltä ajanhetkeltä.*

Kuvasta 1 nähdään, että $X_6(t) = 0$, eli hinta-askeleella 6 ei ole yhtään tarjousta. Hinta-askel 6 jakaa tarjouskirjan ostotarjouksiin, jotka ovat esitetty negatiivisina, ja myyntitarjouksiin, jotka ovat esitetty positiivisina. Oikeassa tilanteessa hinta-askeleita olisi huomattavasti enemmän eikä tarjouskirja olisi näin symmetrinen välttämättä. Tarjousten määrä eri hinta-askeleilla muuttuisi ajassa ja täten myös osto- ja myyntihinnat muuttuisivat jatkuvasti ajassa.

Esitetyillä merkinnöillä voidaan merkitä osto- ja myyntihinta matemaattisesti ja asettaa ne järkeviksi rajatapauksissa. Ostohinta voidaan merkitä

$$p_A(t) = inf\{p = 1, \dots, n,\ X_p(t) > 0\} \wedge (n + 1), \tag{1}$$

missä inf on infimum eli joukon suurin alaraja. Tässä ostohinta pakotetaan n+1 suuruiseksi, jos myyntitarjouksia ei ole tarjouskirjassa. Myyntihinta voidaan määritellä samantapaisesti

$$p_B(t) = sup\{p = 1, \dots, n,\ X_p(t) < 0\} \vee 0, \tag{2}$$

missä sup on supremum eli joukon alin yläraja. Näillä merkinnöillä keskihinta on

$$p_M(t) = \frac{p_B(t) + p_A(t)}{2} \tag{3}$$

ja hintaero on

$$p_S(t) = p_A(t) - p_B(t). \tag{4}$$

Token ja Yoshidan (2016) mukaan kaupankäynti keskittyy lähelle osto- ja myyntihintaa. Tämän ja myöhempien vaiheiden vuoksi on hyvä pitää kirjaa tarjousten määristä tietyllä etäisyydellä osto- tai myyntihinnasta. Merkitään ostotarjousten määrää etäisyydellä i ostohinnasta

$$Q_i^B(t) = \begin{cases} X_{p_A(t)-i}(t), & 0 < i < p_A(t) \\ 0, & p_A(t) \leq i \leq n \end{cases} \tag{5}$$

ja myyntitarjousten määrää etäisyydellä i myyntihinnasta

$$Q_i^A(t) = \begin{cases} X_{p_B(t)+i}(t), & 0 < i < n - p_B(t) \\ 0, & n - p_B(t) \leq i < n \end{cases}. \tag{6}$$

Edellä esitetyt merkinnät sisältävät paljon samaa tietoa, mutta ne tuovat omanlaisen näkökulman tarjouskirjaan. Merkinnöistä $X(t)$ kertoo kokonaisuudesta, p_M ja p_S antavat kaavat halutuille tiedoilla ja Q_i^B ja Q_i^A kertovat tarjouskirjan syvyydestä (Cont et al., 2010). Syvyydellä tässä tarkoitetaan tarjouksien etäisyyttä osto- ja myyntihinnoista. Näin esitettynä tarjouskirjan dynamiikkaa on mahdollista alkaa esittämään matemaattisesti.

2.1 Tarjouskirjan dynamiikka

Tarjouskirjan dynamiikka tarkoittaa tarjouskirjan muutoksia. Nämä muutokset ovat uusia tarjouksia, markkinatarjouksia ja tarjousten peruuntumisia. Käyttämällä hyödyksi $X(t)$-merkintää muutokset voidaan esittää vektorin lisäyksenä tai vähennyksenä tarjouskirjaan. Merkitään muutosta hinnalle p kaavalla

$$x^{p\pm1} = x \pm (0, \dots, 1, \dots, 0). \tag{7}$$

Kaavassa (7) luku 1 on kohdassa p eli hinnalla p olevien tarjousten määrä muuttuu yhdellä.

Kaavan (7) merkinnällä tarjouskirjan muutoksia voi esittää matemaattisesti, kun ottaa huomioon ollaanko osto- vai myyntitarjousten puolella. Seuraavassa listassa on esitetty eri hinnoilla tapahtuvat muutokset ajanhetkellä t:

- Ostotarjous hinnalla $p < p_A(t)$ nostaa tarjousten määrää $x \to x^{p-1}$.
- Myyntitarjous hinnalla $p > p_B(t)$ nostaa tarjousten määrää $x \to x^{p+1}$.
- Markkinatarjous ostaa ostohinnalla vähentää ostohinnalla olevien tarjousten määrää $x \to x^{p_A(t)-1}$.
- Markkinatarjous myydä myyntihinnalla vähentää myyntihinnalla olevien tarjousten määrää $x \to x^{p_B(t)+1}$.
- Ostotarjouksen peruminen hinnalla p vähentää tarjouksien määrää $x \to x^{p+1}$.
- Myyntitarjouksen peruminen hinnalla p vähentää tarjouksien määrää $x \to x^{p-1}$.

Empiirisesti on todettu, että tarjouksia tehdään enemmän osto- ja myyntihinnan lähellä ja niitä tehdään useammin osto- ja myyntihinnan lähettyvillä (Bouchaud et al., 2002). Myös Token ja Yoshidan (2016) tekemä tutkimus tukee näitä havaintoja, mutta

Cont et al. (2010) mukaan riippumattomien Poisson-prosessien malli ottaa edellä kerrotut empiiriset havainnot huomioon. Abergelin ja Jedidin (2011) mukaan tarjouskirjan mallintamisessa on kaksi eri koulukuntaa: taloustieteilijöiden rationaalisten ja epärationaalisten sijoittajien mallit ja enemmän matemaattisesta näkökulmasta tulevat mallit, joissa sijoittavat toimivat sattumanvaraisesti eikä heillä ole strategiaa. Cont et al. (2010) malli kuuluu jälkimmäiseen, eli se ei näe markkinoilla toimijoita vaan tarjouskirja muodostuu sattumanvaraisesti.

Merkitään Cont et al. (2010) mukaan tarjouskirjan dynamiikkaa kuvaavia muuttujia seuraavasti:

- Osto- ja myyntitarjoukset saapuvat *i* hinta-askeleen päähän parhaasta vastaavasta hinnasta eksponentiaalisella tahdilla $\lambda(i)$
- Markkinatarjoukset saapuvat eksponentiaalisella tahdilla μ
- Tarjouksia perutaan *i* hinta-askeleen päässä parhaasta vastakkaisesta hinnasta suhteellinen määrä $\theta(i)$. Tämä tarkoittaa, että jos tarjouksia ei ole tietyllä hinta-askeleella, niin tarjouksia ei voi perua. Jos hinta-askeleella *i* on $|x|$ tarjousta, niin tarjouksia perutaan tahdilla $\theta(i)|x|$ kyseisellä hinta-askeleella.

Lisäksi oletetaan, että mikään edellä esitetyistä suureista ei riipu toisistaan.

Osto- ja myyntitarjousten tahtia voidaan tarkentaa, kun λ:n määrittelyjoukko on $\{1, \dots, n\}$ ja maalijoukko on $[0, \infty)$. Tällöin Zovko ja Farmer (2002) esittävät, että

$$\lambda(i) = \frac{k}{i^{\alpha}}. \tag{8}$$

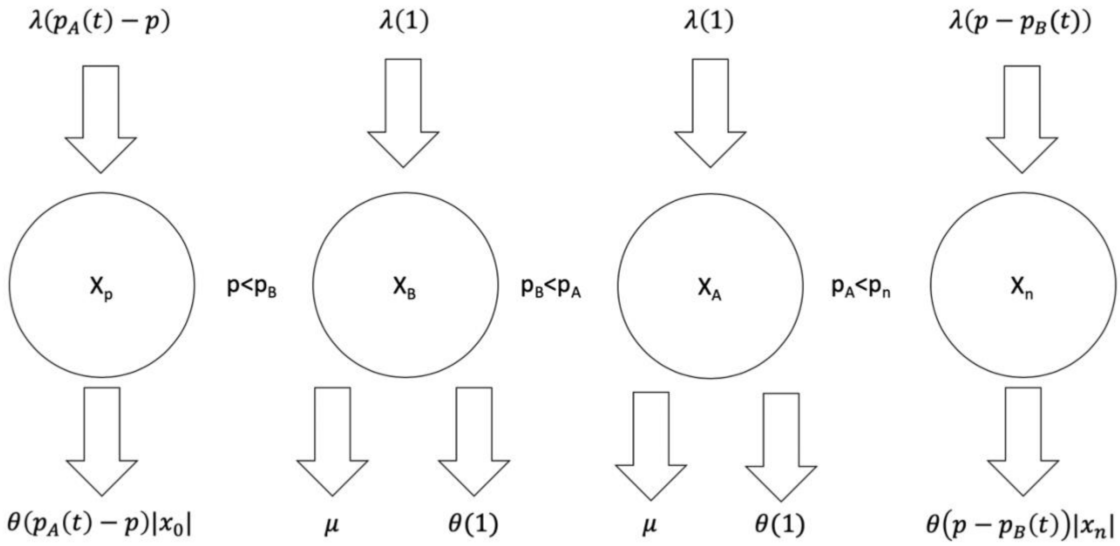
Kaavassa (8) on parametrit *k* ja α, jotka estimoidaan historiadatasta. Kohdassa 2.2. esitetään tapa, jolla mallin parametrit on mahdollista estimoida.

Tarjouskirjan muutoksia voidaan esittää Markovin ketjuna oletuksien perusteella (Cont et al., 2010). Markovin ketjut ovat käytännöllisiä sen takia, että niiden seuraava vaihe riippuu vain edellisestä vaiheesta. Tämän vuoksi nykyhetken tiedoilla on mahdollista ennustaa tulevaisuuteen. Edellä esitettyjen muuttujien avulla Markovin ketjujen muutostahdit voidaan esittää seuraavasti:

- $x \to x^{p-1}$ muuttuu tahdilla $\lambda(p_A(t) - p)$, kun $p < p_A(t)$.
- $x \to x^{p+1}$ muuttuu tahdilla $\lambda\big(p - p_B(t)\big)$, kun $p > p_B(t)$.
- $x \to x^{p_B(t)+1}$ muuttuu tahdilla μ.

- $x \to x^{p_A(t)-1}$ muuttuu tahdilla μ.
- $x \to x^{p+1}$ muuttuu tahdilla $\theta(p_A(t) - p)|x_p|$, kun $p < p_A(t)$.
- $x \to x^{p-1}$ muuttuu tahdilla $\theta(p - p_B(t))|x_p|$, kun $p > p_B(t)$.

Edellä olevasta voidaan tulkita hinta-askeleella *i* oleviin tarjouksiin vaikuttavan 1-3 eri muuttujaa. Jos hinta-askeleella ei ole tarjouksia, niin siihen vaikuttaa vain uusien tarjouksien tuleminen $\lambda(i)$. Jos hinta-askeleella on tarjouksia ja se ei ole osto- tai myyntihinta, niin hinta-askeleella vaikuttaa uudet tarjoukset tahdilla $\lambda(i)$ ja tarjouksien peruminen tahdilla $\theta(i)|x_p|$. Kolmannessa tapauksessa, kun hinta-askel on myynti- tai ostohinta, vaikuttavat μ, $\lambda(1)$ ja $\theta(1)$ tarjousten määrään. Kuvassa 2 on esitetty sama asia visuaalisemmin.



Kuva 2. *Eri hinta-askeleilla olevien tarjouksien määrään vaikuttavat muuttujat. Kuvassa hinta-askeleet on järjestetty paikan p mukaan nousevaan järjestykseen.*

Kuvassa 2 on esitetty Markovin ketju, jossa on esitetty eri hinta-askeleisiin vaikuttavat muuttujat. Hinta-askeleella olevien tarjousten määrää on merkitty x:llä, pallojen yläpuolella olevat muuttujat ovat tarjouksia lisääviä ja pallon alapuolella muuttujat vähentävät tarjouksia. Hinta-askeleita kuvaava muuttuja p saa kaikki arvot väliltä $1 \leq p \leq n$, eli systeemissä on n hinta-askelta, joista jokaisella on omat 1-3 muuttujaa.

Contin et al. (2010) mallia voi kritisoida sen muuttujien $\lambda(i), \theta(i)\ ja\ \mu$ symmetriasta osto- ja myyntitarjousten suhteen. Mallissa tarjouskirjan osto- ja myyntitarjousten puolilla ei ole mitään eroa, eli ainoastaan nykyisten tarjousten määrä jokaisella hinta-askeleella vaikuttaa tarjouskirjan kehitykseen lyhyellä aikavälillä. Cont et al. (2010) osoittavat, että $X(t)$ on ergodinen, eli pitkällä aikavälillä tarjouskirjan kaikki arvot lähenevät tiettyjä arvoja. Tämä johtaa tilanteeseen, missä pitkällä aikavälillä osakkeen tuotto olisi nolla, mikä ei vastaa todellista tilannetta. Toisaalta malli on tarkoitettu ultranopeaan kaupankäyntiin, joten pitkän aikavälin tuottoa ei tarvitse ottaa huomioon, jos mallin parametrit optimoidaan tarpeeksi usein.

2.2 Parametrien estimointi

Mallin hyödyntäminen vaatii parametrien estimoinnin mahdollisimman lähelle optimiarvoja tietyin aikavälein. Aikaväli parametrien estimointien välillä ja siihen käytetty data pitää määrittää erikseen testaamalla mallin toimintaa historiadatalla erilaisilla yhdistelmillä. Joka tapauksessa parametrit pitää estimoida historiadatasta ja optimoinnin pitää viedä mahdollisimman vähän aikaa, koska tuloksia käytetään erittäin lyhyillä aikaväleillä. Esimerkiksi USA:n toiseksi suurimman markkinaoperaattorin viive kaupan rekisteröinnissä oli 69 mikrosekuntia vuonna 2018 (BATS Global Markets, 2018). Tämä arvo ohjaa siinä kuinka nopeaa kaupankäynti voi olla, vaikka kauppoja ei tapahtuisi aina 69 mikrosekunnin välein.

Parametrien estimoinnissa pitää ottaa huomioon, miten parametrit erotellaan toisistaan, koska esimerkiksi μ ja $\theta(1)$ vaikuttavat saman hinta-askeleen tarjouksien määrään yhtä aikaa. Cont et al. (2010) esittävät, että datasta lasketaan ensin markkinatarjoukset S_m, rajahintatarjoukset S_l ja peruutetut tarjoukset S_c, joissa yksikkönä on keskiarvo muista tarjouksista S_l. Näiden merkintöjen avulla voidaan esittää $\lambda(i),\ \theta(i)$ ja μ.

Parametri $\lambda(i)$ voidaan estimoida välillä $1 \leq i \leq 5$ laskemalla

$$\hat{\lambda}(i) = \frac{N_l(i)}{T_*}, \tag{9}$$

missä $N_l(i)$ on uusien rajahintatarjouksien määrä i hinta-askeleen päässä parhaasta vastaisesta tarjouksesta aikavälillä T_*. Arvo $N_l(i)$ saadaan laskemalla, kuinka usein tarjouksien määrä hinta-askeleella kasvoi. (Cont et al., 2010) Parametrin $\lambda(i)$ arvot lasketaan vain välillä $1 \leq i \leq 5$ suoraan, koska käytännössä nopeus on tärkeää ja aikaisemmin datan saatavuus saattoi estää koko tarjouskirjan analysoimisen. Tämän vuoksi kaavan (8) avulla lasketaan estimaattori

$$\hat{\lambda} = \frac{k}{i^{\alpha}}, \tag{10}$$

mitä voidaan käyttää yli 5:n hinta-askeleen päässä olevien rajahintatarjouksien saapumiseen. Parametrit k ja α estimoidaan pienimmän neliösumman mukaan

$$\min_{k,\alpha} \sum_{i=1}^{5} \left(\hat{\lambda}(i) - \frac{k}{i^{\alpha}} \right)^2 \tag{11}$$

(Cont et al., 2010). Kaavan (11) voi ratkaista esimerkiksi Levenberg-Marquardt algoritmilla, mikä on osa Pythonin Scipy-kirjastoa (Moré, 1978; Scipy, 2019).

Markkinatarjousten saapuminen voidaan estimoida

$$\hat{\mu} = \frac{N_m}{T_*}\frac{S_m}{S_l}, \tag{12}$$

missä N_m on saapuneiden markkinatarjousten määrä, missä ei ole otettu huomioon tarjouksia, jotka eivät vaikuttaneet parhaisiin tarjouksiin (Cont et al., 2010). Estimaattori voidaan tulkita markkinatarjousten saapumisnopeudeksi, mikä on suhteutettu rajahintatarjouksien määrään.

Rajahintatarjouksien perumisnopeuden estimaattorin $\hat{\theta}(i)$ laskeminen on hankalampaa, koska perumisnopeus on suhteellinen tarjousten määrään. Ensin määritellään tarjouskirjan keskimääräinen muoto

$$Q_i^B = \frac{1}{S_l}\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} S_i^B(j), \tag{13}$$

missä $1 \leq i \leq 5$, B tarkoittaa ostotarjouksien puolta, M tarkoittaa eri noteerauksien määrää ja $S_i^B(j)$ tarkoittaa tarjousten määrää i hinta-askeleen päässä myyntihinnasta noteerauksessa j. Myyntitarjouksien puoli on mahdollista laskea samalla tavalla ja tarjousten määrä Q_i saadaan laskettua Q_i^B ja Q_i^A keskiarvona. Näiden avulla voidaan laskea estimaattori

$$\hat{\theta}(i) = \frac{N_c(i)}{TQ_i}\frac{S_c}{S_l}, \tag{14}$$

missä $N_c(i)$ on tarjousten määrän lasku, mikä ei johtunut markkinatarjouksista. Lisäksi määritellään

$$\hat{\theta}(i) = \hat{\theta}(5), \qquad i > 5. \tag{15}$$

Näin saatu tarjouksien peruminen on osto- ja myyntitarjouksien puolella symmetrinen. (Cont et al., 2010)

Estimaattoreiden määritelmät ovat siitä hyviä, että niiden laskukaavat voidaan laajentaa $1 \leq i \leq 5$ ulkopuolelle, jos tietokoneen nopeus ja data riittävät laajentamiseen. Esimerkiksi Lontoon pörssissä tason 2 markkinadata antaa mahdollisuuden nähdä koko tarjouskirjan kaikki tarjoukset (London Stock Exchange, 2019).

Parametreja on mahdollista korjata myös sen jälkeen, kun ne on kerran estimoitu. Eräs mahdollisuus olisi korjata parametrien arvoja aina jokaisen hetken jälkeen melkein reaaliaikaisesti. Tässä riskinä olisi parametrien ylisovittaminen, mikä tarkoittaa, että parametrit toimivat erittäin hyvin harjoitteludataan mutta eivät sen ulkopuoliseen.

Tähän parametrien korjaamiseen on useita mahdollisia optimointi algoritmeja, mutta ADAM (”adaptive moment estimation”) mahdollistaisi tilanteeseen sopivan parametrien korjauksen (Kingma & Ba, 2015). Adam päivittää sen oppimisnopeutta automaattisesti sen mukaan, kuinka lähellä se on optimiparametreja. Tämän vuoksi, jos markkinoilla tapahtuisi suuri muutos yllättäen, malli voisi reagoida siihen mahdollisimman nopeasti. Toinen tapa reagoida tähän olisi käyttää regiimin muutosmallia, mutta se ei koske parametrien optimointia (Mills & Markellos, 2008, s. 216–219). Tärkeintä mallissa on, että se toimii normaaleissa oloissa, mutta automaattinen reagointi poikkeustiloihin on etu.

3. TAPAHTUMIEN TODENNÄKÖISYYDET

Tässä osassa perusoletuksista ja -elementeistä johdetaan malli, jota voidaan käyttää eri tapahtumien todennäköisyyksien laskemiseen tulevaisuuteen. Tärkeimmät tapahtumat tarjouskirjassa ovat keskihinnan liikkuminen ylös tai alas, onnistunut kauppa tietyllä hinnalla ja osakkeen ostaminen ja myyminen ennen hinnanmuutoksia.

Kappaleessa 3.1 esitetään, miten Laplace-muunnosta voidaan käyttää apuna pistetodennäköisyysfunktion löytämisessä, ja miten Laplace-muunnosta voidaan hyödyntää syntyvyys- ja kuolemaprosessissa. Kappaleessa 3.2 johdetaan laskukaavat todennäköisyyksille, joilla hinta nousee tai laskee. Kappaleessa 3.3 osoitetaan laskukaava, minkä mukaan kauppa onnistuu ennen hinnan muuttumista. Kappaleessa 3.4 johdetaan kaava, jolla saadaan todennäköisyys tuottaa hintaero ennen hintojen muuttumista, ja kappaleessa 3.5 esitetään tapa käyttää kappaleissa 3.1-3.4 johdettuja tuloksia hyödyksi.

3.1 Laplace-muunnokset syntyvyys- ja kuolemaprosessissa

Laplace-muunnoksen avulla on mahdollista laskea satunnaismuuttujan pistetodennäköisyysfunktio, mikä on mallinnuksen lopullinen päämäärä. Pistetodennäköisyysfunktion avulla on mahdollista määrittää tapahtumien todennäköisyyksiä yksinkertaisesti. Esimerkiksi, jos $f(x)$ on satunnaismuuttujan x pistetodennäköisyysfunktio, $\mathbb{P}(x) = f(x)$.

Laplace-muunnos on muotoa

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \qquad s = \sigma + i\omega, \in \mathbb{C}, \qquad \sigma, \omega \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

missä s on kompleksinen frekvenssi taajuusparametri ja f on paloittain jatkuva funktio eksponentiaalisella kertaluvulla K. Eksponentiaalinen kertaluku määritellään

$$|f(t)| \leq Me^{Kt}, \qquad t \geq 0, \tag{17}$$

missä $f\colon [0,\infty)$, $M > 0$ ja $K \in \mathbb{R}$. (Pohjolainen, 2015, s. 101). Jos integraali lasketaan välillä $(-\infty, \infty)$, saadaan kaksisuuntainen Laplace-muunnos

$$\mathfrak{B}\{f\}(s) = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-st}dt\,, \tag{18}$$

jolle pätee samat ehdot kuin kaavalle (16) ja $\mathfrak{B}$ tarkoittaa kaksisuuntaista Laplace-muunnosta (Weisstein, 2019). Käänteinen Laplace-muunnos on muotoa

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{ts}\,\hat{f}(s)ds, \qquad (19)$$

kun σ on riittävän suuri reaaliluku ja $\hat{f}(s)$ on funktion $f(x)$ Laplace-muunnos (Pohjolainen, 2015, s. 116). Laplace-muunnokselle ja sen käänteismuunnokselle pätee

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}\{f\}(x)) = f(x). \qquad (20)$$

Täten kaavasta (20) havaitaan, että jos on mahdollista määrittää funktion Laplace-muunnos, alkuperäinen funktio on mahdollista määrittää siitä. Tämä tulos on tärkeä, koska syntyvyys- ja kuolemaprosessille, jollaisena tarjouskirja voidaan nähdä, on määritetty Laplace-muunnos (Abate & Whitt, 1999).

Esitetään syntyvyys- ja kuolemaprosessi, jossa λ_i ja μ_i ovat vakioita, kun $i \geq 1$. Merkitään ensimmäistä hetkeä, jolla prosessi saa arvon 0, merkinnällä σ_b, kun prosessi alkaa tilalta b. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\sigma_b = \sigma_{b,b-1} + \sigma_{b-1,b-2} + \cdots + \sigma_{1,0}, \qquad (21)$$

missä merkintä $\sigma_{i,i-1}$ tarkoittaa aikaa tilalta i tilalle $i-1$ ja kaikki $\sigma_{i,i-1}$ ovat riippumattomia toisistaan. Nyt voidaan määritellä $\hat{f}_b$, mikä on σ_b:n Laplace-muunnos, ja vastaavasti $\hat{f}_{i,i-1}$ on $\sigma_{i,i-1}$:n Laplace-muunnos. (Cont et al., 2010) Käyttämällä hyödyksi (Zakayo, 2015, s. 114) ja (Perttula et al., 2012 s.12) tuloksia saadaan

$$\hat{f}_{X+Y} = \mathbb{E}\left(e^{-s(X+Y)}\right) = \mathbb{E}[e^{-sX}]\mathbb{E}[e^{-sY}] = \hat{f}_X(s)\hat{f}_Y(s), \qquad (22)$$

millä lasketaan kaavan (21) Laplace-muunnos (Cont et al., 2010)

$$\hat{f}_b(s) = \prod_{i=1}^{b} \hat{f}_{i,i-1}(s). \qquad (23)$$

Käyttämällä Abaten & Whittin (1999) kaavaa 4.9 saadaan tulos

$$\hat{f}_{i,i-1}(s) = -\frac{1}{s}\Phi_{k=i}^{\infty}\frac{-\lambda\mu_k}{\lambda+\mu_k+s}, \qquad (24)$$

missä Φ on ketjumurtoluku. Näin yhdistämällä kaavat (23) ja (24) saadaan laskettua prosessin ensimmäisen hetki, jona se saa arvon 0, (Cont et al., 2010)

$$\hat{f}_b(s) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^b \left(\prod_{i=1}^{b} \Phi_{k=1}^{\infty}\frac{-\lambda\mu_k}{\lambda+\mu_k+s}\right). \qquad (25)$$

Kaavan (25) käänteinen Laplace-muunnos kertoo käytännössä todennäköisyyden, millä prosessi saa arvon 0 hetkellä t, kun prosessi alkaa tilasta b. Kaavaa (25) ja sen käänteismuunnosta hyödyntämällä voidaan laskea ehdolliset todennäköisyydet kappaleissa 3.2, 3.3 ja 3.4.

3.2 Hintamuutosten suunnat

Keskihinta muuttuu, jos parhaalla hinnalla olevat osto- tai myyntitarjoukset loppuvat tai jos tarjousten väliin tulee uusi tarjous. Hinta kasvaa, jos myyntitarjoukset hinnalla p_A loppuvat tai joku asettaa tarjouksen ostotarjousta p_B korkeammalle. Hinta laskee, jos ostotarjoukset hinnalla p_B loppuvat tai joku asettaa tarjouksen myyntitarjousta p_A alemmas. Merkitään $X_A \equiv |X_{p_A(\cdot)}(\cdot)|$ ostohinnalla ja $X_B \equiv |X_{p_B(\cdot)}(\cdot)|$ myyntihinnalla olevien tarjouksien määriä tietyllä hetkellä. Lisäksi määritellään ensimmäinen hetki, kun keskihinta ei ole sama kuin alussa

$$T \equiv inf\{t \geq 0, p_M(t) \neq p_M(0)\}. \tag{26}$$

Näiden merkintöjen avulla voidaan kirjoittaa hintamuutoksen suunnat.

Hinta muuttuu ylöspäin todennäköisyydellä

$$\mathbb{P}[p_M(t) > p_M(t) | X_A(0) = a, X_B(0) = b, p_S(0) = S], \tag{27}$$

ja alaspäin todennäköisyydellä

$$\mathbb{P}[p_M(t) < p_M(t) | X_A(0) = a, X_B(0) = b, p_S(0) = S]. \tag{28}$$

Kaavoissa (27) ja (28) $S > 0$. Sijoittamalla $\lambda = -\lambda(S)$ ja $\mu_k = \mu + k\theta(S)$ kaavaan (25) saadaan Laplace-muunnos todennäköisyydelle (27)

$$\hat{f}_j^S(s) = \left(-\frac{1}{\lambda(S)}\right)^j \left(\prod_{i=1}^{b} \Phi_{k=1}^{\infty} \frac{-\lambda(S)\big(\mu + k\theta(S)\big)}{\lambda(S) + \mu + k\theta(S) + s}\right), \tag{29}$$

kun $j \geq 1$. Cont et al. (2010) esittävät, että $\Lambda_S = \sum_{i=1}^{S-1} \lambda(i)$, mikä muuttaa kaavan (29) muotoon

$$\begin{aligned} \hat{F}_{a,b}^S(s) = \frac{1}{s}&\left(\hat{f}_a^S(\Lambda_S + s) + \frac{\Lambda_S}{\Lambda_S + s}\left(1 - \hat{f}_a^S(\Lambda_S + s)\right)\right) \\ &\cdot \left(\hat{f}_b^S(\Lambda_S + s) + \frac{\Lambda_S}{\Lambda_S + s}\left(1 - \hat{f}_b^S(\Lambda_S + s)\right)\right). \end{aligned} \tag{30}$$

Kaava (30) supistuu muotoon

$$\hat{F}_{a,b}^S(s) = \frac{1}{s} \hat{f}_a^S(s) \hat{f}_b^S(-s), \tag{31}$$

kun $S = 1$ (Cont et al., 2010).

Kaavan (31) käänteinen Laplace-muunnos antaa todennäköisyyden, millä hinta nousee, kun se arvioidaan 0:ssa. Todennäköisyys (28) saadaan laskettua kaavan (31) käänteismuunnoksen avulla helposti, koska jos hinta ei nouse, se laskee. Täten todennäköisyys laskulle on

$$\mathbb{P}[p_M(t) < p_M(t)] = 1 - \mathbb{P}[p_M(t) > p_M(t)] \tag{31}$$

merkittynä ilman ehtoja.

Tapaus, jossa $S \neq 1$ on monimutkaisempi, koska tarjouksia voi tulla parhaiden tarjouksien väliin myös. Tällöin tarjous voi olla $S - 1$ ja 1 päässä parhaasta tarjouksesta. Tällöin hinnan muutoksen aikaa merkitään

$$T = \sigma_A \wedge \sigma_B \wedge min\{\sigma_A^i, \sigma_B^i, i = 1, \ldots S - 1\} \tag{32}$$

Tässä tapauksessa sidotaan kaikki S-1 ja 1 etäisyydellä olevat tarjoukset merkinnällä σ^Σ. Cont et al. (2010) osoittavat, että

$$\mathbb{P}\left[\sigma_A \wedge \sigma_B^\Sigma < \sigma_B \wedge \sigma_A^\Sigma\right], \tag{33}$$

lasketaan kaavan

$$\hat{f}_{\sigma_B \wedge \mathrm{Z}} = \hat{f}_b^1(\Lambda + s) + \frac{\Lambda}{\Lambda + s}\left(1 - \hat{f}_b^1(\Lambda + s)\right), \tag{34}$$

avulla. Kaavassa (34) $\hat{f}_b^1$ lasketaan kaavalla (29) ja Z paikalle sijoitetaan Σ kaavasta (33). Tällä tavalla voidaan selvittää $\sigma_B \wedge \sigma_A^\Sigma - \sigma_A \wedge \sigma_B^\Sigma$ laskemalla erotettavien todennäköisyyksien suuruudet.

3.3 Kaupan onnistuminen ennen hintamuutosta

Markkinoilla on tärkeää, että osakkeet saadaan parhaaseen mahdolliseen hintaan, koska pienetkin erot muuttuvat suuriksi tehtäessä useita kauppoja per päivä. Markkinatarjouksilla on mahdollista saada sillä hetkellä paras mahdollinen hinta, mutta tarjouksia voi olla vain vähän parhaalla hinnalla. Tämä voi aiheuttaa pahimmillaan tarjousten loppumisen, mikä voi johtaa vuoden 2010 tapaiseen markkinoiden horjuttamiseen lyhyellä aikavälillä (Amadeo, 2019). Rajahintatarjouksilla on mahdollista estää turhan kalliilla ostaminen tai liika halvalla myyminen asettamalla raja hinnalle, mutta rajahintatarjouksessa on riski, että tarjous ei toteudu. Tämän vuoksi on hyvä tietää, onnistuuko rajahintatarjous etukäteen ja verrata todennäköisyyttä markkinatarjoukseen.

Esitetään kaava, jolla voi laskea todennäköisyyden rajahintatarjouksen onnistumiselle ennen kuin keskihinta muuttuu ilman tarjouksen perumista. Merkitään NC_b tilannetta, missä ostotarjousta ei peruta, ja NC_a tilannetta, missä myyntitarjousta ei peruta. Tällöin todennäköisyys onnistua ostotarjouksessa on

$$\mathbb{P}[\epsilon_B < T | X_B(0) = b, X_A(0) = a, p_S(0) = S, NC_b], \tag{35}$$

mikä on sama todennäköisyys onnistua myyntitarjouksessa, koska malli on symmetrinen (Cont et al., 2010). Kaavassa (35) ϵ_B tarkoittaa ensimmäistä kertaa, kun ostohinnalla olevia tarjouksia ei ole jäljellä.

Cont et al. (2010) merkitsevät

$$\hat{g}_j^S(s) = \prod_{i=1}^{j} \frac{\mu + \theta(S)(i-1)}{\mu + \theta(S)(i-1) + s}. \tag{36}$$

Tämän avulla voidaan laskea todennäköisyys (35)

$$\hat{F}_{a,b}^S(s) = \frac{1}{s} \hat{g}_b^S(s) \left(\hat{f}_b^S(2\Lambda_S - s) + \frac{2\Lambda_S}{2\Lambda - s} \left(1 - \hat{f}_b^S(2\Lambda_S - s)\right) \right), \tag{37}$$

käänteismuunnoksen avulla kohdassa 0, missä $\hat{f}_b^S$ on kaavan (29) mukainen, $j \geq 1$ ja $\Lambda_S \equiv \sum_{i=1}^{S-1} \lambda(i)$. Kaava (37) supistuu muotoon

$$\hat{F}_{a,b}^S(s) = \frac{1}{s} \hat{g}_b^1(s) \hat{f}_a^S(-s), \tag{38}$$

kun S=1. Kaavan (37) voi laajentaa alueeseen $S > 1$ samalla tavalla kuin kaavan (30) käyttämällä kaavaa (34) parametrilla $2\Lambda_S$. (Cont et al., 2010)

3.4 Hintaeron tuottaminen

Osakemarkkinoilla hintaeron suuruisen voiton voi tehdä asettamalla rajahintatarjouksen osto- ja myyntihinnalle. Jos myyntihinnalle asetetaan ostotarjous ja ostohinnalle myyntitarjous, tarjouskirjan muutosten seurauksena tarjoukset täyttyvät ja tarjouksien asettaja ansaitsee hintaeron $p_B - p_A$. Tämän toteutuminen ei tosin ole varmaa ja hintaero saattaa muuttua suuremmaksi tai pienemmäksi, mikä muuttaa tilanteen kannattavuutta. Tästä syystä tarjouksien jättäjän on hyvä tietää todennäköisyys onnistua tässä kaupassa, mikä mahdollistaa tilastollisen arbitraasin.

Hintaeron tuottamisen todennäköisyydelle

$$\mathbb{P}[max\{\epsilon_a, \epsilon_b\} | X_B(0) = b, X_A(0) = a, p_S(0) = 1, NC_a, NC_b] \tag{39}$$

voidaan johtaa kaava

$$h_{a,b} + h_{b,a}, \tag{40}$$

missä

$$h_{a,b} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a} \mathbb{P}[\epsilon_j < \sigma_i] \int_0^{\infty} P_{0,i}^X(t) P_{a,j}^W(t) g_b^1(t)dt, \tag{41}$$

missä

$$P_{0,i}^X(t) \equiv \frac{e^{-\lambda^X(t)}\lambda^X(t)^i}{i!}, \lambda^X(t) \equiv \frac{\lambda}{\theta}\left(1 - e^{-\theta t}\right), \tag{42}$$

$$P_{a,j}^W(t) \equiv \left(e^{Q_a^W t}\right)_{a,j} \equiv \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(Q_a^W)^k\right)_{a,j}, \tag{43}$$

$$Q_a^W \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu & -\mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu+\theta & -\mu-\theta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu+(a-1)\theta & -\mu-(a-1)\theta \end{bmatrix}, \tag{44}$$

ja g_b^1 on kaavan (36) käänteinen Laplace-muunnos (Cont et al., 2010). Tarkempi kaavan tarkastelu ohitetaan tässä kandidaatintyössä.

3.5 Mallin hyödyntäminen lyhyellä aikavälillä

Yleisesti tapa laskea todennäköisyydet (27), (28), (35) ja (39) Laplace-muunnoksen avulla on erittäin hyödyllinen, koska sillä voidaan laskea muuttujien σ_A, σ_B, ϵ_A ja ϵ_B koko jakaumat ja esimerkiksi viive $\delta > 0$ käsittelyajoissa $\mathbb{P}[\sigma_A + \delta < \sigma_B]$ (Cont et al., 2010). Mallia vertaillaan tarkemmin vaihtoehtoisiin malleihin luvussa 4.

Lyhyellä aikavälillä viiveen huomioon ottaminen on merkittävä kilpailuetu, koska minimissään viive oli 69 μs vuonna 2018 Cboe:n markkinoilla (BATS Global Markets, 2018) ja Hasbrouck ja Saar (2013) arvioivat paikan tai teknologian vaikuttavan viiveeseen 10 – 30 ms tai 150 ms. Paikasta tai teknologiasta johtuva viive on siis 145-kertainen verrattuna markkinapaikan viiveeseen. Jos viive johtuu paikasta, kaupankävijä voi ottaa viiveen huomioon viiveellä δ tehdessään kauppoja. Teknologian huomioiminen on myös mahdollista, mutta tässä tilanteessa erikseen viiveen huomioon ottaminen saattaa hidastaa kaupankäyntiä entisestään.

Suoraan kaupankäyntiin soveltuvia strategioita voidaan esitellä kaksi kappaleiden 3.2 ja 3.4 tuloksien avulla. Cont et al. (2010) mukaan tilastollisen arbitraasin voi tuottaa, kun todennäköisyys hinnan kasvulle on korkea. Positio avataan hinnalla $X_A(0)$, mikä on matalampi kuin uusi odotettu keskihinta. Tämän jälkeen positiosta poistutaan hetkellä τ rajahintatarjouksella (Cont et al., 2010)

1. $p_B(\tau) > p_A(0)$, eli positio myydään kalliimmalla kuin ostohinnalla.

2. $p_B(\tau) = p_B(0)$ ja $X_B(\tau) = 1$, mikä tuottaa yhden hinta-askeleen tappion.

Toinen strategia on hintaeron tuottaminen kaavan (39) perusteella. Tässä tapauksessa pohditaan, toteutuvatko hinnoille $p_B(0)$ ja $p_A(0)$ asetetut rajahintatarjoukset kuinka todennäköisesti. Jos todennäköisyys on suuri, avataan myyntitarjous hinnalle $p_A(0)$ ja ostotarjoushinnalle $p_B(0)$.

Avaamisen jälkeen rajahintatarjouksista molemmat toteutuvat, toinen toteutuu tai kumpikaan ei toteudu ennen hintojen muuttumista. Jos molemmat tarjoukset toteutuvat, markkinatakaaja tekee hintaeron suuruisen voiton. Jos vain toinen kaupoista toteutuu, markkinatakaajalla on joko yksi long- tai short-positio, josta markkinatakaaja haluaa päästä eroon. Jos hintaeron on yhden hinta-askeleen suuruinen hinnan muuttuminen tarkoittaa, että markkinatakaaja tekee tappiota, mutta jos hintaeron suurempi kuin yhden hinta-askeleen suuruinen, markkinatakaaja voi vielä tehdä voittoa kaupalla. Long-position tapauksessa markkinatakaajan tarvitsee myydä osake korkeammalla hinnalla, koska hän osti osakkeen hinnalla $p_B(0)$ ja hän voi myydä osakkeen hinnalla $p_A(\tau)$ markkinatarjouksella. Short-position tapaus on päinvastainen, koska tällöin markkinatakaajan tarvitsee ostaa osake. Tämä onnistuu ostamalla osake hinnalla $p_B(\tau)$ markkinatarjouksella. Toisessa tapauksessa markkinatakaaja siis asettaa vastakkaisen markkinatarjouksen kuin mitä ennen hinnan muuttumista. Kolmannessa tapauksessa, kun kumpikaan rajahintatarjous ei toteudu markkinatakaaja voi asettaa uudet rajahintatarjoukset uusille hinnoille.

Cont et al. (2010) mukaan rajahintatarjoukset kannattaa asettaa aina, kun todennäköisyys hintaeron tuottamiselle on suuri. Toisaalta he eivät kommentoi mikä on suuri todennäköisyys tai anna muuta kriteeriä rajahintatarjouksien asettamiselle. Tällöin rajahintatarjouksia kannattaisi asettaa melkein aina (Lu & Abergel, 2018b). Lun ja Abergelin (2018) mukaan tämä ei tosin tuota voitollista strategiaa empirian perusteella.

4. VAIHTOEHTOISET MALLIT

Tässä luvussa tarkastellaan kirjallisuuden valossa, millaisia vaihtoehtoisia tarjouskirjamalleja on olemassa ja millaisia tuloksia malleilla on saatu. Tarkastelu keskittyy eri mallien tärkeimpiin ideoihin ja ominaisuuksiin, jotka eroavat Contin et al. (2010) mallista.

Taulukkoon 1 on kerätty kirjallisuuden pohjalta eri tapoja mallintaa tarjouskirjaa. Malleista on kerätty niiden otsikko, lähde, kuvaus ja niiden tärkeimmät tulokset. Mallin kuvauksessa tiivistetään, miten tarjouskirjaa on mallinnettu tai millainen dynamiikka malliin on lisätty, mikä tekee mallista paremman. Tärkeimpiin tuloksiin taulukossa 1 on kerätty empiirisen tarjouskirjan ominaisuuksia, jotka kyseinen malli mallintaa hyvin.

Taulukko 1. Eri tapoja mallintaa tarjouskirjaa.

Otsikko ja lähde	**Mallin kuvaus**	**Tärkeimmät tulokset**
Order-book Modelling and Market Making Strategies (Lu & Abergel, 2018b)	Malliin on lisätty viimeisimpien hintamuutosten ehdollinen vaikutus seuraavaan hintaan ja tarjouksien määrät on huomioitu täsmällisesti ilman yksikkökokoa. Itse malli on Monte Carlo –simulaatio.	Tarjouksien määrät huomioidaan tarkasti, markkinatarjouksien suurempi vaikutus hintamuutoksiin mallinnetaan paremmin ja markkinantakausstrategiasta saadaan positiivinen tuotto.
Mean Field Games (Lasry & Lions, 2007)	Osittaisdifferentiaalimalli, joka on johdettu äärettömän monen agentin toiminnan yhteisvaikutuksesta.	Malli tuottaa uniikkeja analyyttisiä ratkaisuja, jotka kuvaavat hinnan kehitystä, kun osto- ja myyntitarjoukset eivät ole symmetrisiä (Markowich et al., 2009). Tosin mallin tulokset ovat deterministisiä ja tämän vuoksi hinnan muutokselle ei voida muodostaa todennäköisyyttä. Lisäksi mallissa ei huomioida

		muiden ominaisuuksien, kuten tarjousten määrän ja hinnan volatiliteetin, vaikutusta toisiinsa
A Stochastic PDE Model for Limit Order Book Dynamics (Cont & Mueller, 2019)	Stokastinen osittaisdifferentiaalimalli, joka huomioi eri markkinaosapuolet. Alustavasta mallista on johdettu laskennallisesti tehokas kaksivaiheinen malli ja toinen malli, joka kuvaa tarjouskirjan palaamista sen keskiarvoiseen muotoon.	Alustava malli yhdistää stokastiset ja osittaisdifferentiaalimallit, joita on tehty empirian perusteella. Näin johdetut mallit kuvaavat tarjouskirjan muotoa, volatiliteettia, hintamuutoksia, lyhyen aikavälin tuottoa ja eri elementtien korrelaatioita.
Second Order Approximations for Limit Order Books (Horst & Kreher, 2018)	Mallissa on hyödynnetty toisen asteen stokastisia differentiaaliyhtälöitä ja osittaisdifferentiaaliyhtälöitä, joille on kaksi eri regiimiä ja joissa Horstin ja Kreherin (2017) ratkaisu on eksogeeninen muuttuja. Ensimmäisessä regiimissä hintamuutokset ovat harvinaisia, mikä johtaa mitattavaan malliin. Toisessa regiimissä hintamuutoksia tapahtuu ja tämän seurauksena toisen asteen parametrit ovat satunnaisia.	Mallissa on huomioitu omien toimintojen vaikutus hintoihin, mikä on tärkeä tieto suurien portfolioiden hallinnassa. Mallissa on myös huomioitu toimintojen vakituinen vaikutus hintoihin, mikä on tärkeä huomio likvidoinnin suhteen, mutta myös myöhempien toimeksiantojen vuoksi.
High Dimensional Hawkes Processes for Limit Order Books	Moniulotteinen epälineaarinen Hawkes–prosessi (pisteprosessi),	Mallin ehdolliset todennäköisyydet eri toimeksiannoille ovat lähellä

Modelling, Empirical Analysis and Numerical Calibration (Lu & Abergel, 2018a)	joka on estimoitu suurimman uskottavuuden mukaan.	empiirisiä arvoja. Malli tuottaa lisäksi parempia estimaatteja kuin riippumattomat Poisson–prosessit, joita käytetään usein mallintamisessa.
DeepLOB: Deep Convolutional Neural Networks for Limit Order Books (Zhang et al., 2019)	Syvä konvoluutioneuroverkko, jonka parametrit on estimoitu FI-2010 datalla.	Malli ennustaa keskihintaa parhaiten vertailluista koneoppimisen malleista. Toisaalta malli ei ennusta muita ominaisuuksia kuin keskihintaa.

Taulukossa 1 vaihtoehtoisia malleja on tarkasteltu laajasti eri kehityskohteiden löytämiseksi Contin et al. (2010) malliin. Tarjouskirjan mallintamiseen on käytetty useita eri tapoja, mutta stokastiset prosessit ja differentiaaliyhtälöt ovat useiden ratkaisujen ytimessä. Toisaalta stokastiset prosessit ja differentiaaliyhtälöt ovat hyvin laajoja kokonaisuuksia, jotka sisältävät monia erilaisia tapoja, joilla tarjouskirjaa voi mallintaa. Tästä syystä kvalitatiivisesti kaksi mallia saattavat olla hyvin samanlaisia, mutta niiden tulokset voivat erota paljon toisistaan kvantitatiivisesti. Tässä muodossa taulukko 1 toimii hyvin ideoiden saamiseen, mutta mahdollinen parhaiden ominaisuuksien löytäminen yhdistelevään malliin vaatisi kvantitatiivisen vertailun.

Lisäksi 2010-luvulla koneoppimisen menetelmät ovat yleistyneet ja näillä menetelmillä malleja on mahdollista tehdä hyvin nopeasti ilman hyvin erikoistunutta matematiikan osaamista. Koneoppiminen tarjoaa mahdollisuuden löytää tulevaisuudessa uusia eksogeenisia muuttujia, joita ei ole ennen käytetty matemaattisessa mallintamisessa (Sun & Wu, 2008). Näin koneoppimisen kautta matemaattisia malleja voidaan parantaa ja lopulta mahdollisesti syrjäyttää, jos koneoppimisen mallit pärjäävät paremmin kuin matemaattiset mallit. Koneoppimisen malleissa riskinä on aina tosin, että malli ei ennusta haluttua asiaa vaan se käyttää jotain epäoleellista ominaisuutta ennustuksen tekemiseen (Heaven, 2019).

5. PÄÄTELMÄT

Tarjouskirjan matemaattinen mallintaminen on monia matematiikan osa-alueita yhdistävä kokonaisuus, joka vaatii syvällistä matemaattista osaamista. Erityisiä osaamisalueita ovat stokastiset prosessit ja reaalianalyysi, jotka ovat mallintamisen ytimessä. Mallit ovat kehittyneet vuosien aikana ja tarvittava osaaminen mallien kehittämiseksi on pitkän perehtymisen takana, eikä myöskään mallien numeerinen implementointi käytäntöön ole helppoa.

Contin et al. (2010) stokastinen tarjouskirjan malli oli kandidaatintyössä erityisessä tarkastelussa, koska malli on ollut merkittävässä roolissa 2010-luvulla viittausten määrän perusteella (Researchgate, 2019) ja malli tuotti erinomaisia tuloksia sen kirjoitushetkellä. Nykyhetkellä mallin tuloksista ei ole saatavilla tietoa suoraan, mutta mallin implementointi ja testaaminen nykyisillä markkinoilla voi olla yksi tulevaisuuden haaste.

Kandidaatintyön tutkimuskysymyksenä oli miten Contin et al. (2010) malli vertautuu muihin tarjouskirjan matemaattisiin malleihin. Tutkimuskysymykseen vastattiin pääasiassa luvussa 4, jota ennen Contin et al. (2010) malliin syvennyttiin ja se käytiin perusteellisesti läpi samalla tuoden esille kehityskohteita. Tutkimuskysymykseen vastattiin esittämällä kehityskohteita malliin, kun malliin syvennyttiin, ja löytämällä useita erilaisia tapoja mallintaa tarjouskirjaa luvussa 4. Luvussa 4 erilaisia tapoja painotettiin enemmän kuin tapojen määrää tai kvantitatiivisia tuloksia. Näin esitettynä Contin et al. (2010) malliin on mahdollista implementoida muiden mallien ominaisuuksia ja näin parantaa mallin tuloksia.

Contin et al. (2010) mallissa kaikki tarjouskirjan tarjoukset skaalataan yksikkökokoon, mikä vähentää mallin mahdollisuutta huomioida pieniä muutoksia (Lu & Abergel, 2018b). Tämän rajoitteen poistaminen parametrien symmetrisyys oletuksen kanssa mahdollistaisi pienempien yksityiskohtien mallintamisen, mutta optimoinnista tulisi haastavampaa, koska parametrien määrä kasvaisi huomattavasti. Optimointi ei ole erityisen suuri ongelma, koska 2010-luvulla optimointimenetelmät ja tietokoneiden laskentateho ovat parantuneet huomattavasti. Toisaalta mallin käyttäminen hyvin lyhyillä aikaväleillä voisi kärsiä parametrien lisäämisestä ja jatkuvasta mallin optimoinnista.

Mallia voidaan tosin parantaa huomattavasti lisää huomioimalla eri muuttujien ja tapahtumien korrelaatioita (Lu & Abergel, 2018b), minkä Cont et al. (2010) ovat jättäneet vain kehityskohteeksi. Contin et al. (2010) mukaan näiden ominaisuuksien lisääminen voi taas rikkoa mallin analyyttisen ratkaisun, mikä on ollut yksi mallin erityisistä eduista muihin verrattuna. Ilman analyyttista ratkaisua mallin laskennallinen tehokkuus voi laskea.

Lisäksi mallissa oletetaan tapahtumien olevan eksponentiaalisesti jakautuneita riippumattomia Poisson-prosesseja, mikä ei ole uudemman tutkimuksen valossa oikea oletus. Esimerkiksi Cont ja Mueller (2019) käyttävät geometrisia jakaumia ja Lu ja Abergel (2018a) epälineaarisia Hawkes-prosesseja. Täten mallin perusoletuksissa on eroja empiirisiin havaintoihin.

Tämä kandidaatintyö on toiminut mahdollisuutena oppia tarjouskirjan mallintamisesta huomattavasti ja samalla työ mahdollistaa mallin kehittämisen tulevaisuudessa. Jatkossa mallin implementointi ja eri kehityskohteiden kokeileminen käytännössä ovat mielenkiintoisia mahdollisuuksia. Työ on onnistunut luomaan pohjan tuleville haasteille.

LÄHTEET

Abate, J., & Whitt, W. (1999). Computing Laplace transforms for numerical inversion via continued fractions. *INFORMS Journal on Computing*. Saatavissa: https://doi.org/10.1287/ijoc.11.4.394.

Abergel, F., & Jedidi, A. (2011). A mathematical approach to order book modelling. *New Economic Windows*.

Amadeo, K. (2019). Flash Crash Explained With Examples. Saatavissa (viitattu 6.11.2019): https://www.thebalance.com/what-is-a-flash-crash-3306184.

BATS Global Markets, I. (2018). *Cboe System Performance: World-Class, Sustained Low Latency*. Saatavissa (viitattu 8.12.2019): https://cdn.cboe.com/resources/features/bats_exchange_Latency.pdf.

Bouchaud, J. P., Mézard, M., & Potters, M. (2002). Statistical properties of stock order books: Empirical results and models. *Quantitative Finance*. Saatavissa: https://doi.org/10.1088/1469-7688/2/4/301.

Cont, R., & Mueller, M. S. (2019). A stochastic PDE model for limit order book dynamics. *ArXiv E-Prints*, arXiv:1904.03058.

Cont, R., Stoikov, S., & Talreja, R. (2010). A Stochastic Model for Order Book Dynamics. *Operations Research*, *58*, 549–563. Saatavissa: https://doi.org/10.2139/ssrn.1273160.

Hasbrouck, J., & Saar, G. (2013). Low-latency trading. *Journal of Financial Markets*. Saatavissa: https://doi.org/10.1016/j.finmar.2013.05.003.

Heaven, D. (2019). Why deep-learning AIs are so easy to fool. *Nature*. Saatavissa: https://doi.org/10.1038/d41586-019-03013-5.

Horst, U., & Kreher, D. (2017). A weak law of large numbers for a limit order book model with fully state dependent order dynamics. *SIAM Journal on Financial Mathematics*. Saatavissa: https://doi.org/10.1137/15M1024226.

Horst, U., & Kreher, D. (2018). Second order approximations for limit order books. *Finance and Stochastics*. Saatavissa: https://doi.org/10.1007/s00780-018-0373-7.

Hu, E., Hughes, P., Ritter, J., Vegella, P., & Zhang, H. (2018). *Tick Size Pilot Plan and Market Quality*. Saatavissa (viitattu 8.12.2019): https://www.sec.gov/files/dera_wp_tick_size-market_quality.pdf.

Huang, W., Lehalle, C. A., & Rosenbaum, M. (2015). Simulating and Analyzing Order Book Data: The Queue-Reactive Model. *Journal of the American Statistical Association*. Saatavissa: https://doi.org/10.1080/01621459.2014.982278.

Kingma, D. P., & Ba, J. L. (2015). Adam: A method for stochastic gradient descent. *ICLR: International Conference on Learning Representations*.

La Spada, G., Farmer, J., & Lillo, F. (2010). Tick Size and Price Diffusion. *ArXiv.Org, Quantitative Finance Papers*, *9*. Saatavissa: https://doi.org/10.1007/978-88-470-

1766-5_12.

Lasry, J. M., & Lions, P. L. (2007). Mean field games. *Japanese Journal of Mathematics*. Saatavissa: https://doi.org/10.1007/s11537-007-0657-8.

London Stock Exchange. (2019). A Guide to Level 2 Market Data. Saatavissa (viitattu 8.12.2019): https://www.londonstockexchange.com/prices-and-markets/stocks/tools-and-services/level2/level2guide.pdf.

Lu, X., & Abergel, F. (2018a). High-dimensional Hawkes processes for limit order books: modelling, empirical analysis and numerical calibration. *Quantitative Finance*. Saatavissa: https://doi.org/10.1080/14697688.2017.1403142.

Lu, X., & Abergel, F. (2018b). Order-Book Modeling and Market Making Strategies. *Market Microstructure and Liquidity*. Saatavissa: https://doi.org/10.1142/s2382626619500035.

Markowich, P. A., Matevosyan, N., Pietschmann, J. F., & Wolfram, M. T. (2009). On a parabolic free boundary equation modeling price formation. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. Saatavissa: https://doi.org/10.1142/S0218202509003978.

Mills, T., & Markellos, R. (2008). *The Econometric Modelling of Financial Time Series* (3rd ed.). New York: Cambridge University Press.

Moré, J. J. (1978). *The Levenberg-Marquardt algorithm: Implementation and theory*. Saatavissa: https://doi.org/10.1007/bfb0067700.

Perttula, A., Vattulainen, K., & Suurhasko, T. (2012). *Todennäköisyyslaskenta* (9th ed.). Saatavissa (viitattu 8.12.2019): https://moodle2.tut.fi/pluginfile.php/577373/mod_resource/content/1/tnlmoniste.pdf.

Pohjolainen, S. (2015). *Kompleksimuuttujan funktiot*. Saatavissa (viitattu 8.12.2019): https://moodle.tuni.fi/mod/folder/view.php?id=73257.

Quarteroni, A. (2009). Mathematicals Models in Science and Engineering. *Notices AMS.*, *56*.

Researchgate. (2019). A Stochastic Model for Order Book Dynamics. Saatavissa (viitattu 7.12.2019): https://www.researchgate.net/publication/220244458_A_Stochastic_Model_for_Order_Book_Dynamics.

Scipy. (2019). scipy.optimize.least_squares. Saatavissa (viitattu 8.12.2019): https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.least_squares.html.

Sun, Y., & Wu, D. (2008). A RELIEF based feature extraction algorithm. *Society for Industrial and Applied Mathematics - 8th SIAM International Conference on Data Mining 2008, Proceedings in Applied Mathematics 130*. Saatavissa: https://doi.org/10.1137/1.9781611972788.17.

Toke, I., & Yoshida, N. (2016). Modelling intensities of order flows in a limit order book. *Quantitative Finance*. Saatavissa: https://doi.org/10.1080/14697688.2016.1236210.

Varian, H. R. (1987). The Arbitrage Principle in Financial Economics. *Journal of Economic Perspectives*, *1*(2), 55–72. Saatavissa: https://doi.org/10.1257/jep.1.2.55.

Weisstein, E. (2019). Bilateral Laplace Transform. Saatavissa (viitattu 8.12.2019): http://mathworld.wolfram.com/BilateralLaplaceTransform.html.

Zakayo, M. (2015). *Laplace Transform in Probability Distributions and in Pure Birth Processes*. Nairobi: University of Nairobi.

Zhang, Z., Zohren, S., & Roberts, S. (2019). DeepLOB: Deep convolutional neural networks for limit order books. *IEEE Transactions on Signal Processing*. Saatavissa: https://doi.org/10.1109/TSP.2019.2907260.

Zovko, I., & Doyne Farmer, J. (2002). The power of patience: A behavioural regularity in limit-order placement. *Quantitative Finance*. Saatavissa: https://doi.org/10.1088/1469-7688/2/5/308.